Interrogation n°1 – Applications (sujet A)
Corrigé

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Soit $f : E \to F$ une application. Soit $A \subset E$ et $y \in F$. Compléter la caractérisation :

$$y \in f(A) \iff \dots\dots\dots$$

Cf cours.

2) Soit $f : x \mapsto x^2$. Sans justifier, donner tous les éléments de l'ensemble $f^{-1}(\{0, 2\})$:

$$f^{-1}(\{0, 2\}) = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$$

$f^{-1}(\{0, 2\}) = \left\{-\sqrt{2}, 0, 2\right\}$. Ce sont en effet tous les antécédents de 0 et de 2 par la fonction f

3) Compléter les formules suivantes :

$$f(A \cup A')\dots\dots\dots \qquad\qquad f^{-1}(B \cap B')\dots\dots\dots$$

Cf cours.

4) Soit $f : E \to F$ une application. Donner la définition en termes de quantificateurs de « f est injective » :

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$\forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$

5) Soit $f : E \to F$ une application et $B \subset F$. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Cf TD

Interrogation n°1 – Applications (sujet B)

Corrigé

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Soit $f : E \to F$ une application. Soit $B \subset F$ et $x \in E$. Compléter la caractérisation :

$$x \in f^{-1}(B) \iff \dots\dots\dots$$

Cf cours.

2) Soit $f : x \mapsto x^2$. Sans justifier, donner une expression simplifiée de l'ensemble $f([-1,3])$:

$$f([-1,3]) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$f([-1,3]) = [0,9]$. En traçant le graphe de la fonction carré, l'ensemble image de $[-1,3]$ est $[0,9]$. En voici une preuve rigoureuse mais longue.

On raisonne par double inclusion :

- Montrons que $f([-1,3]) \subset [0,9]$. Soit $y \in f([-1,3])$. Alors il existe $x \in [-1,3]$ tel que $y = f(x) = x^2$. Montrons que $y \in [0,9]$. Puisque $-1 \leq x \leq 3$, on peut distinguer deux cas :
  - Si $0 \leq x \leq 3$, alors $0^2 \leq x^2 \leq 3^2$, donc $y \in [0,9]$
  - Si $-1 \leq x \leq 0$, alors $(-1)^2 \geq x^2 \geq 0$ car $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Ainsi, $1 \geq y \geq 0$. On a bien $y \in [0,9]$.
- Montrons que $[0,9] \subset f([-1,3])$. Soit $y \in [0,9]$. Montrons que $y \in f([-1,3])$, i.e. $\exists x \in [-1,3] \quad y = x^2$. On pose $x = \sqrt{y}$. On a donc $x^2 = \sqrt{y}^2 = y$. Ainsi, $y \in f([-1,3])$.

Finalement, $f([-1,3]) = [0,9]$

3) Compléter les formules suivantes :

$$f(A \cap A') = \dots\dots\dots \qquad\qquad f^{-1}(B \cup B') = \dots\dots\dots$$

Cf cours.

4) Soit $f : E \to F$ une application. Donner la définition en termes de quantificateurs de « f est surjective » :

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$

5) Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Cf TD.